Repaso de límites

Ejercicios y problemas

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} x^3 + 2x^2 - x - 10$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 3}$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 4}$

d) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)^2 - (x-2)^3 - 5}{(x+1)^3 - (x-2)^2 - 7}$

Sol.: *a)* 4; *b)* $-\frac{7}{3}$; *c)* 0; *d)* $\frac{1}{5}$; *e)* $\frac{1}{14}$

2. Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

g) $\lim_{x\to 3} f(x)$

h) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Sol.: *a)* $-\infty$; *b)* 3; *c)* 3; *d)* 3; *e)* 13; *f)* $\frac{1}{6}$; *g)* No existe; *h)* 0

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x + 5}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 10x + 25}$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

Sol.: *a)* No existe; *b)* $+\infty$; *c)* $-\infty$

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} (5x^3 - 2x^2 + x - 3)$

b) $\lim_{x\to -\infty} (5x^3 - 2x^2 + x - 3)$

c) $\lim_{x\to +\infty} (-8x^{50} + 1)$

d) $\lim_{x\to -\infty} (-8x^{50} + 1)$

Sol.: *a)* $+\infty$; *b)* $-\infty$; *c)* $-\infty$; *d)* $-\infty$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{6x^4 + 1}{2x^5 + 1}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{6x^4 + 1}{2x^3 + 1}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1}$

d) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4 + 1}{2x^4 + 1}$

e) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4 + 1}{2x^3 + 1}$

Sol.: *a)* 0; *b)* $+\infty$; *c)* $-\infty$; *d)* 3; *e)* $+\infty$; *f)* $-\infty$

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2x + 7}{x - 3} \cdot \dfrac{x + 5}{4x - 3}\right]$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left[\dfrac{x + 2}{x + 1} \cdot \dfrac{x - 7}{x - 3}\right]$

Sol.: *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* 1

7. Halla el valor de *a* para que se cumpla:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2 + a}{x - a} - \frac{x^2 - a}{x + a}\right] = 6$$

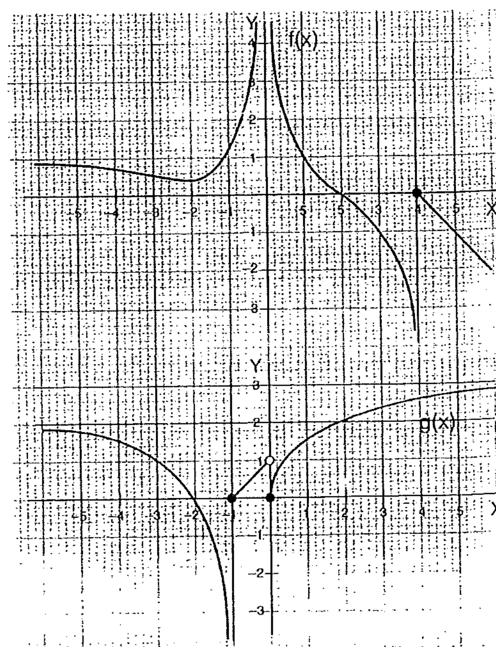
Sol.: $a = 3$

8. Determina el valor de *a* y *b* para que se cumpla:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 2$$

Sol.: $a = 4$; $b = -12$

9. Halla las ecuaciones de las asíntotas de las funciones representadas en la figura siguiente:



10. Determina las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^{10} + 8x^7 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2 - 25}$

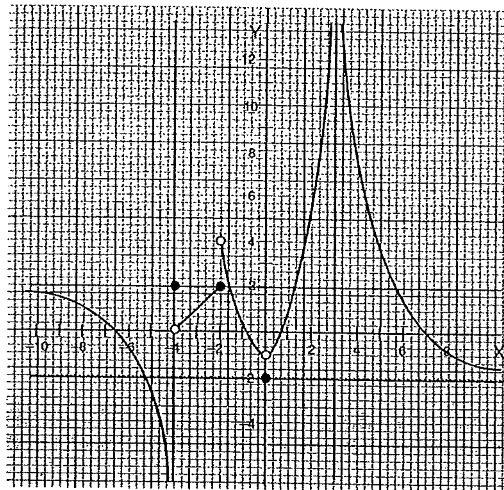
c) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x - 1}{x^4 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

Sol.: *a)* Ninguna; *b)* $x = 5$, $x = -5$; *c)* $y = 3$; *d)* $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $y = 0$; *e)* $x = -3$, $y = 1$

11. Considera la gráfica de la función f.



Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *e)* $\lim_{x \to -4} f(x)$ *i)* $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *f)* $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ *j)* $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ *g)* $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ *k)* $\lim_{x \to 3} f(x)$

d) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ *h)* $\lim_{x \to -2} f(x)$ *l)* $\lim_{x \to 0} f(x)$

— Indica en qué puntos f no es continua y qué tipo de discontinuidad presenta.

Sol.: *a)* 2; *b)* −2; *c)* $-\infty$; *d)* 0; *e)* No existe; *f)* 2; *g)* 4; *h)* No existe; *i)* $+\infty$; *j)* $+\infty$; *k)* $+\infty$; *l)* −1
f es discontinua en $x = -4$ (salto infinito), $x = -2$ (salto finito), $x = 0$ (evitable) y $x = 3$ (salto infinito)

Madd. Ocón

$\infty - \infty$ indeterminazioa eta 1^∞ indeterminazioa

Kalkulatu ondorengo limiteak

① $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$ (E: ∄)

② $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right)$ (E: −1)

③ $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x+7} - x \right)$ (E: 1)

④ $\lim_{x \to \infty} \left[(x+1) - \sqrt{x^2+2} \right]$ (E: 1)

⑤ $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$ (E: ∄)

⑥ $\lim_{x \to \infty} \left(2x-1 - \sqrt{4x^2+3x+1} \right) =$ (E: $-7/4$)

⑦ $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-3} \right)^{x+1}$ (E: e^4)

⑧ $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{x}$ (E: e)

⑨ $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5+x}{3+x} \right)^{3x}$ (E: e^6)

⑩ $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x}$ (E: $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

⑪ $\lim_{x \to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$ (E: e)

$\infty - \infty$

- Zatikietan → (1. Eragiketa egiten da (zatikien batura edo kenketa) $\infty-\infty$ indeterminazioa $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa bihurtuz. 2. Limitea ebatzi.
- Erroketan → Adierazpena konjokatuaz biderkatu eta zatitu, sinplifikatu eta limitea kalkulatu.

Ad:

① $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{x^2-2}{x+1}\right) \overset{\infty-\infty \text{ ind.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x+1)-(x+3)(x^2-2)}{(x+3)(x+1)} =$ (ind ∞/∞)

($\frac{\infty}{\infty}$) → $\frac{1}{0}$ ∞

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-(x^3-2x+3x^2-6)}{x^2+x+3x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3+2x-3x^2+6}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+2x+6}{x^2+4x+3} -2$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{x^2-2}{x+1}\right)=-2}$$

② $\lim_{x\to\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2+3x+1}\right) \overset{\infty-\infty \text{ ind}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1-\sqrt{4x^2+3x+1})(2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1})}{(2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1})}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2-(\sqrt{4x^2+3x+1})^2}{2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1-4x-(4x^2+3x+1)}{2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1}} =$ (∞/∞ ind)

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1-4x-4x^2-3x-1}{(2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1})} = \lim_{x\to\infty}\frac{-7x}{(2x-1+\sqrt{4x^2+3x+1})} = \boxed{\frac{-7}{4}}$

maila altuena x → $\frac{\text{Koefizientea } -7}{\text{Koefizientea } 2+2}$

③ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x+5}-x\right) \overset{\infty-\infty \text{ ind}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2-5x}{x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-8x}{x+5} = \boxed{-8}$ (∞/∞ ind.)

1^{∞} ind.

↓

limitea ∃ bada e zenbakiaren berreketa bat da.

Ondorengo formula aplikatuz ebazten da.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\left(f(x)-1\right)}$$

Ad. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-3}\right)^{x+1} \overset{1^{\infty}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}(x+1)\left(\frac{2x+5}{2x-3}-1\right)} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty}(x+1)\left(\frac{2x+5-2x+3}{2x-3}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{8x+8}{2x-3}} \overset{\infty/\infty \text{ ind.}}{=} \boxed{e^{4}}$

$\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x} \overset{1^{\infty}\text{ ind.}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1+x+x^2-1\right)} \overset{0/0 \text{ ind.}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}x(1+x)} =$

$e^{\lim_{x\to 0} 1+x} = e^{1} = \boxed{e}$

Segiden limiteak. Segidetan n-k $+\infty$-ra jotzen duenean soilik du zentzua limitea aztertzeak horregatik batzuetan ez da adierazten esplizituki x-moranto jotzen duen.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$\quad\parallel$

$\lim a_n = L.$

Ad: Kalkulatu $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ eta $b_n = \frac{n^2-n}{n-1}$ segiden limiteak

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\infty}{\infty}$ ind $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2} = \boxed{2} \rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)$ koefizienteak begiratuz.

$n\to\infty$, ahal da ez jarri

$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\infty}{\infty}$ ind $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-1} = \boxed{\infty} \rightarrow \left(\frac{1}{0}\right)$

Maddi Ocón

$\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa eta $\frac{k}{0}$ indeterminazioa.

Kalkulatu ondoengo limiteak:

① $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+7)(x+5)}{(x-3)(4x-3)} =$ ______ (E: 1/2)

② $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)(x-7)}{(x+1)(x-3)}$ (E: 1)

③ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^4} =$ (E: 0)

④ $\lim_{x \to \infty} \frac{(1+x)^2-1}{x} =$ (E: ∞)

⑤ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-6x+1}{x-3} =$ $\frac{\infty}{\infty}$ ind. $-\infty$ (E: $-\infty$)

⑥ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-4x+7}{(x+2)^2}$ (E: 3)

⑦ $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+7}{\sqrt{4x^2+2x}+3x}$ (E: 2/5)

⑧ $\lim_{x \to 5} \frac{x^2+5x-14}{x^2-10x+25}$ (E: ∞)

⑨ $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2-9}$ (E: $\nexists$)

⑩ $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18} \right)$ (E: $\nexists$)

⑪ $\lim_{x \to 2} \frac{6x-5}{4x^2-16x+16}$ (E: ∞)

⑫ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+\sqrt{4x^2+3x-5}}{5x-3}$ (E: 1)

Modelo Ocon

Kalkulatu ondorengo limiteak: Batzuk zuzenak
Besteak $\frac{0}{0}$ indeterminazioa

① $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+5}{x^3-2x^2+x-3}$ ⇒ $\lim_{x\to 1} = -\frac{7}{3}$ (Emaitza: $-\frac{7}{3}$)

② $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+x^2-8x-12}$ $\frac{0}{0}$ $= \frac{x+1}{x-3}$ ⇒ $\lim_{x\to -2} = \frac{1}{5}$ (Emaitza: $\frac{1}{5}$)

③ $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3+3x^2-9x-27}$ $\frac{0}{0}$ $= \frac{x^2-x-6}{x^2+6x+9}$ → $\lim_{x\to 3} = 0$ (E: 0)

④ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ (E: 0)

⑤ $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ (E: $2\sqrt{3}$)

⑥ $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$ (E: 3/4)

⑦ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$ (E: 0)

⑧ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$ (E: 2)

⑨ $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x-4}$ (E: 2)

⑩ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$ (E: $\frac{2}{3}$)

⑪ $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{-1-x}$ (E: -1)

⑫ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ (E: 4)